

Leçon 1.1

Oscillateur 1D Libre, Conservatif

ME-332 – Mécanique Vibratoire

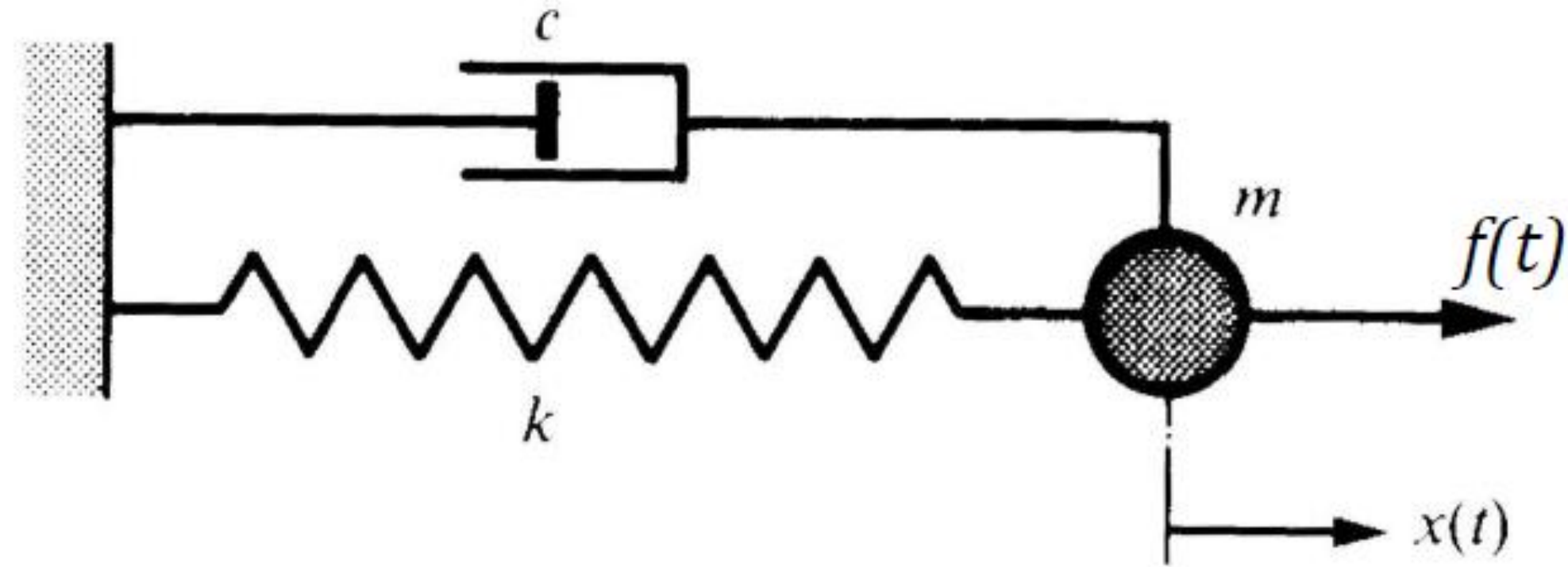
Prof. Guillermo Villanueva

- Différents régimes de l'oscillateur
- Oscillateur libre conservatif
- Solution
- Vecteurs tournants
- Vitesse et Accélération
- Approche Hamiltonien

Chapitre 3:

Oscillateur 1D libre, conservatif

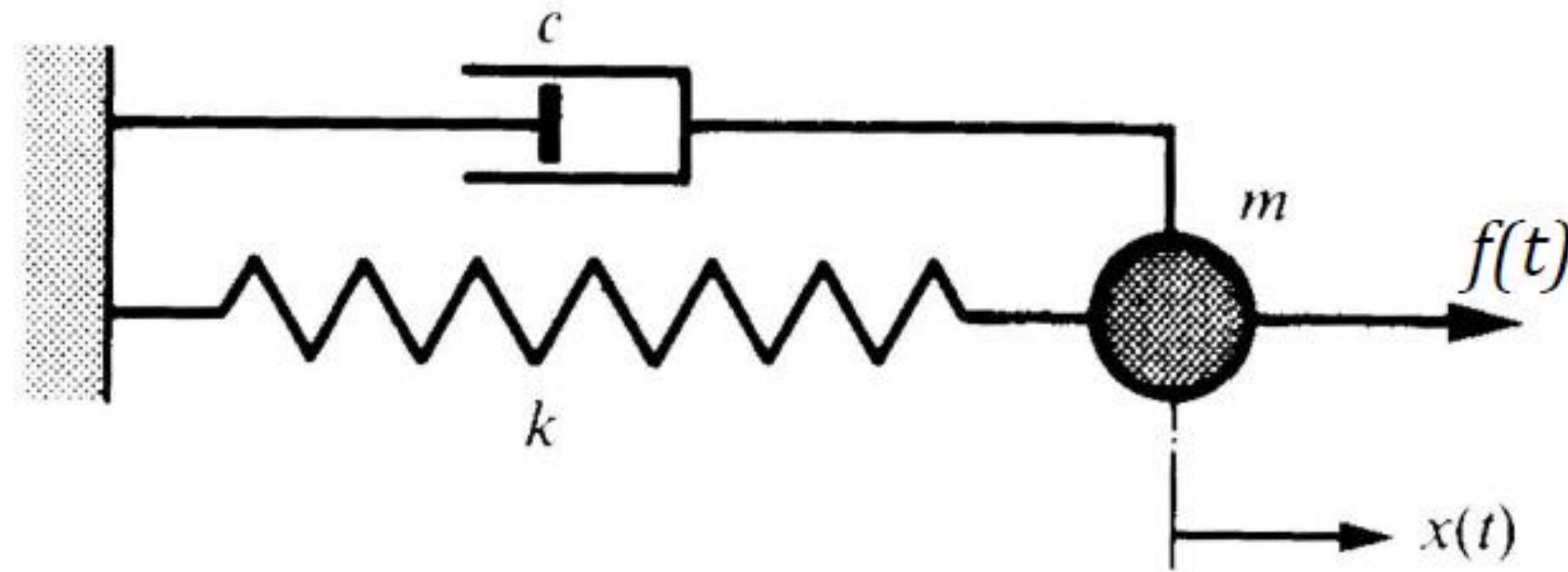
EPFL Différents régimes



■ $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ (2.1)

- $f(t) = 0 \rightarrow$ Libre
- $f(t) \neq 0 \rightarrow$ Forcé
- $c = 0 \rightarrow$ Conservatif
- $c \neq 0 \rightarrow$ Dissipatif

EPFL Régime libre & conservatif – Solution



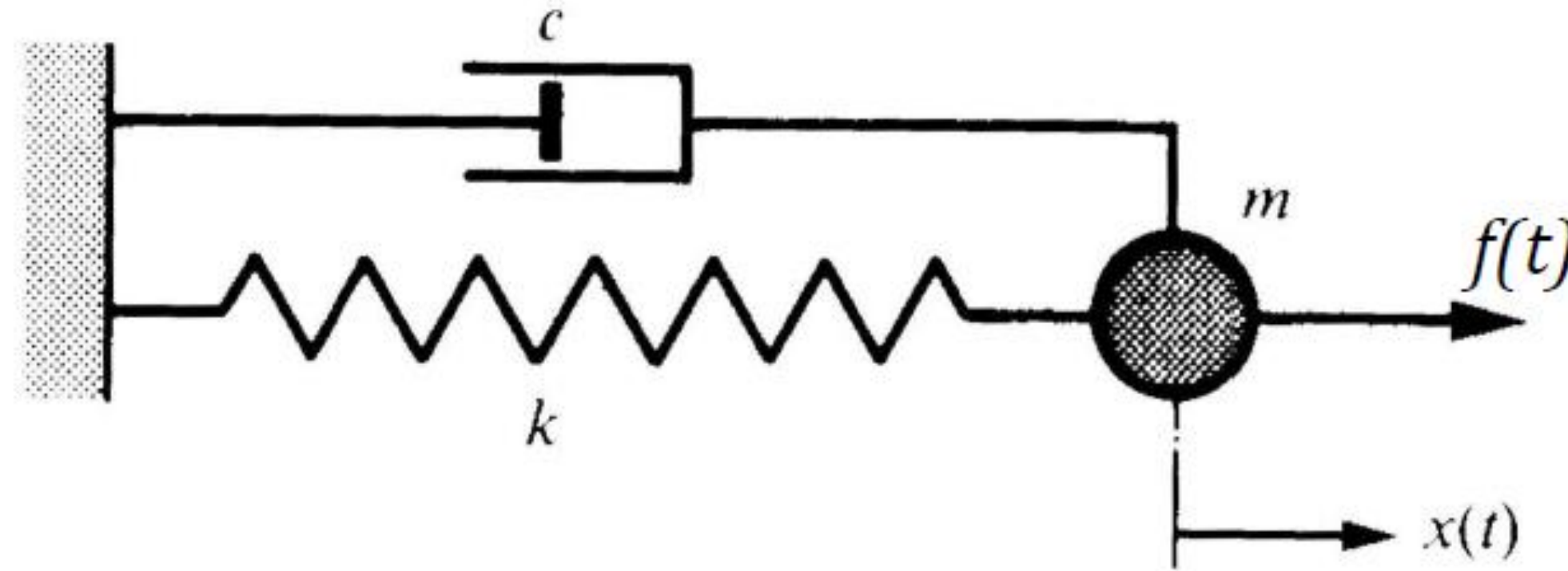
- $m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (3.1)

- Avec conditions initiales: $x(t = 0) = x_0; \dot{x}(0) = v(0) = v_0$

- Solution:

- $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) + B \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$ (3.2)

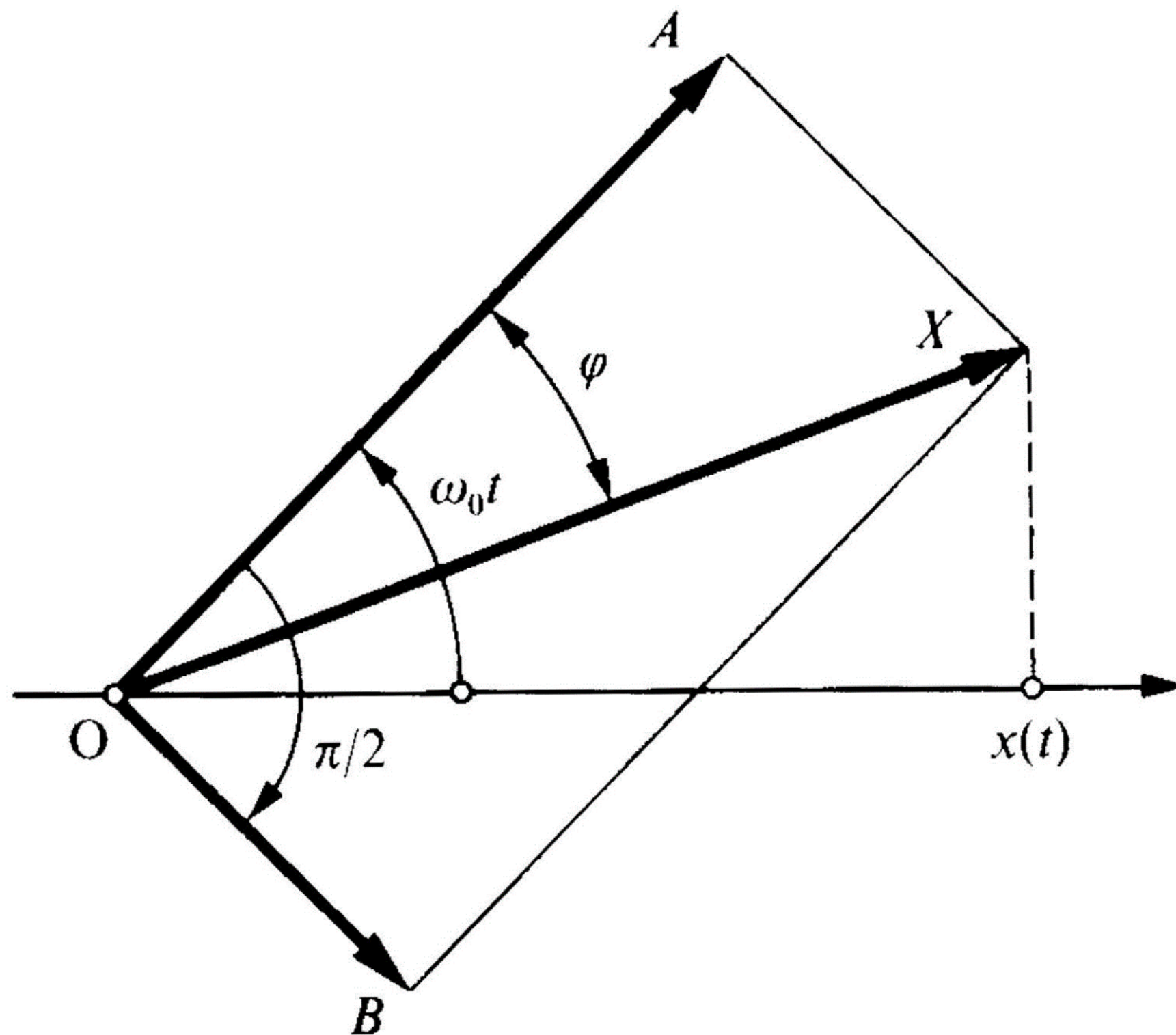
EPFL Régime libre & conservatif – Solution avec Laplace



- $m\ddot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (3.1)
 - Avec conditions initiales: $x(t = 0) = x_0; \dot{x}(0) = v(0) = v_0$
- Laplace:
 - $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow X(s^2 + \omega_0^2) - sx_0 - v_0 = 0 \rightarrow X = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{v_0}{\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
- Solution:
 - $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$

EPFL Régime libre & conservatif – Vecteurs Tournants

- $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t) + B \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$ (3.2)
- Diagramme de vecteurs tournants:



EPFL Régime libre & conservatif

- Autre forme de la solution:

- $x(t) = X \cos(\omega_0 t - \varphi)$

(3.3)

- $$\begin{cases} X = \sqrt{A^2 + B^2} \\ \tan(\varphi) = \frac{B}{A} \end{cases}$$

(3.4)

- Fréquence propre

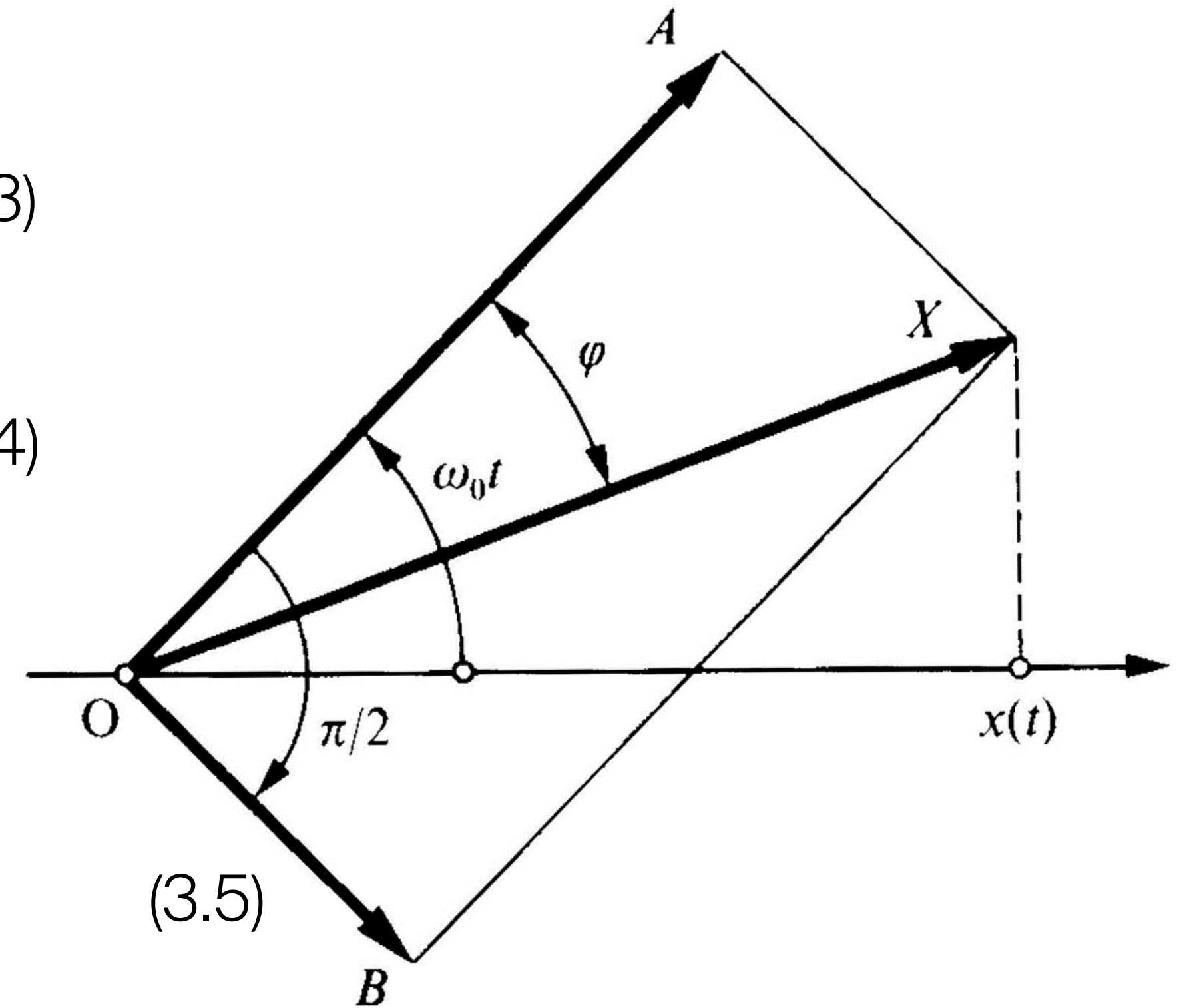
- $f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0$

(3.5)

- Période

- $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$

(3.6)



EPFL Régime libre & conservatif – Vitesse & Accélération

- Vitesse en régime libre:

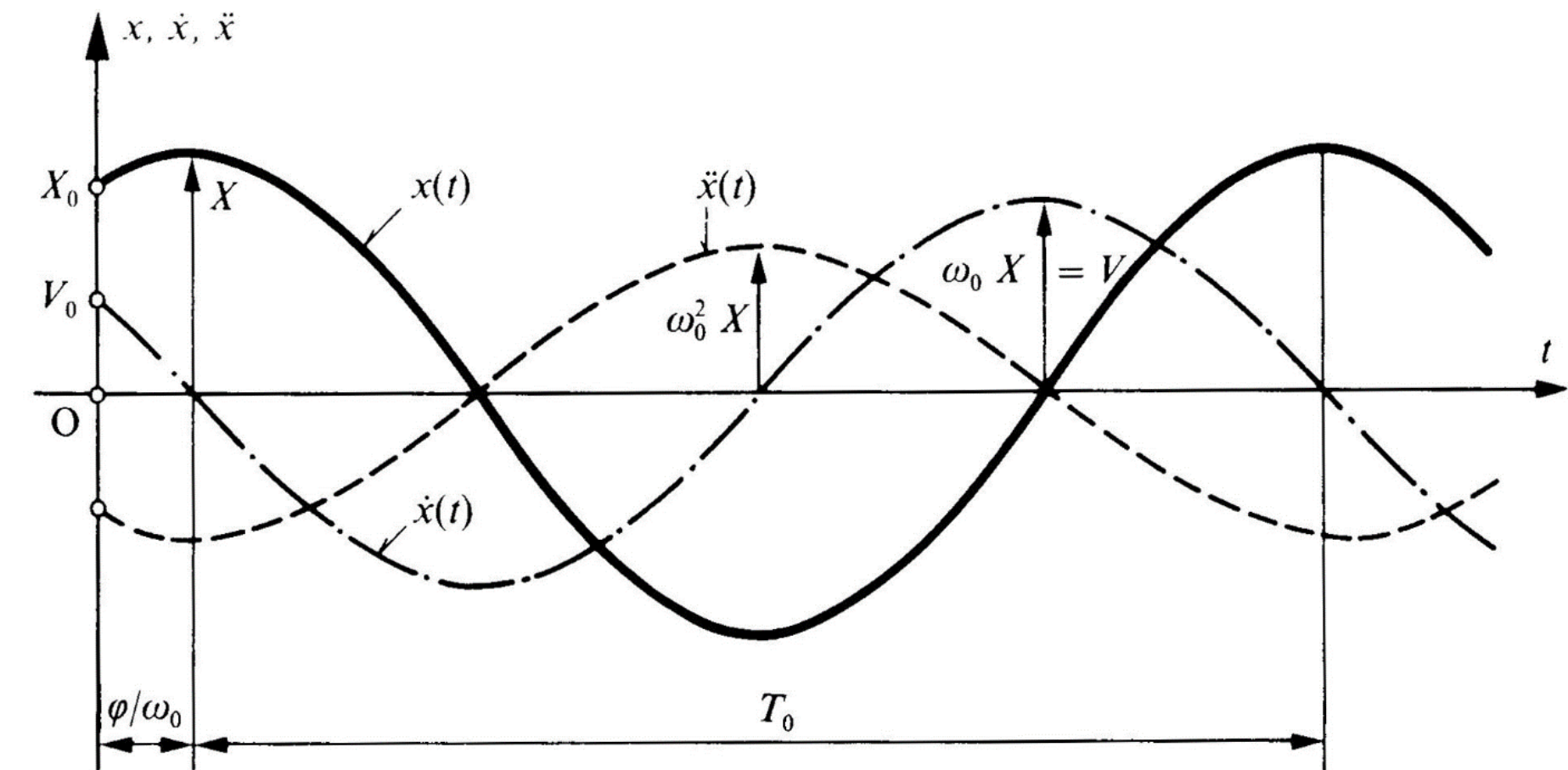
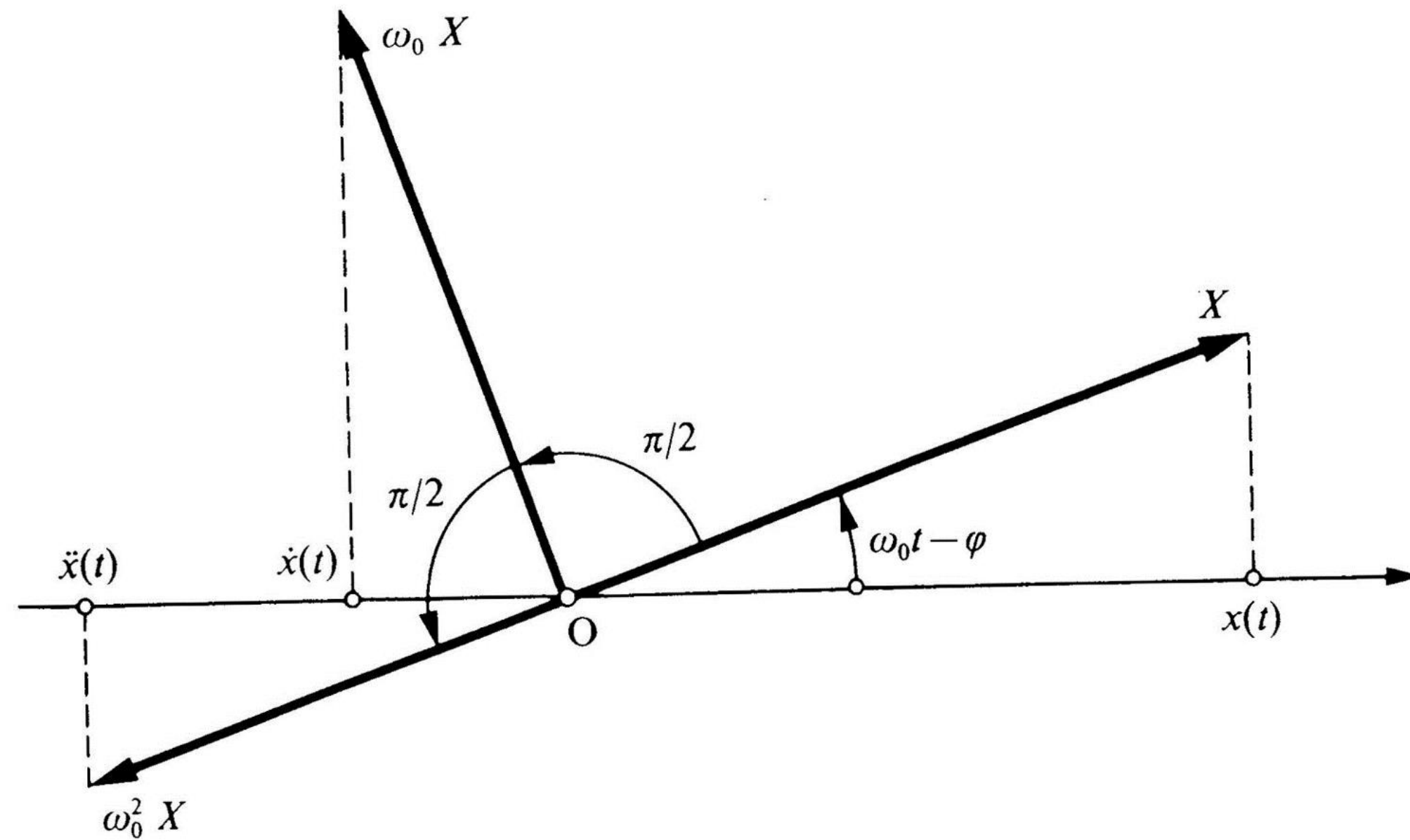
- $\dot{x}(t) = -\omega_0 X \sin(\omega_0 t - \varphi) = \omega_0 X \cos\left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ (3.7)
- Avance de phase de $\frac{\pi}{2}$

- Accélération en régime libre:

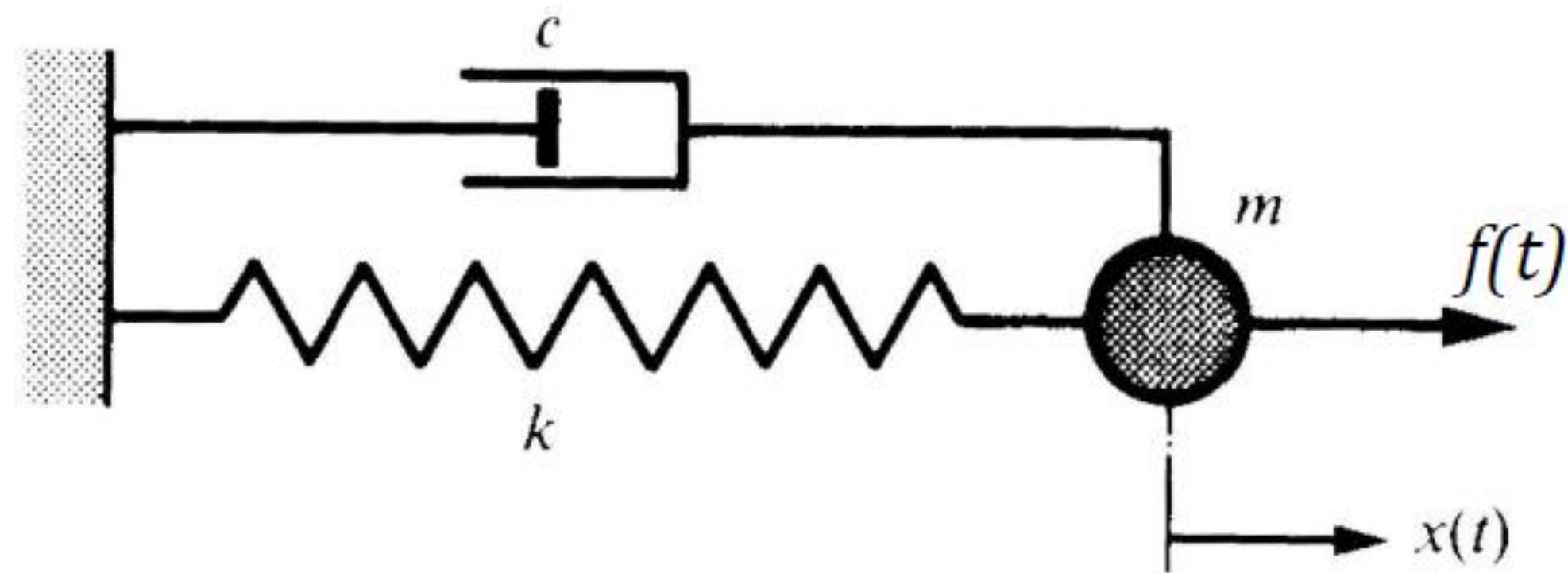
- $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi) = \omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi + \pi) = -\omega_0^2 x(t)$ (3.8)
- Avance de phase de π

EPFL Régime libre & conservatif – Vitesse & Accélération

- $\dot{x}(t) = \omega_0 X \cos\left(\omega_0 t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\ddot{x}(t) = \omega_0^2 X \cos(\omega_0 t - \varphi + \pi)$



EPFL Approche énergétique: Hamiltonien



- Conservation de l'énergie interne

- $T + V = H = cte \quad (3.9)$

- $\frac{dH}{dt} = 0 \quad (3.10)$

- Equivalence avec équation Newton:

- $H = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow \frac{dH}{dt} = (m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$